

2024年

東大数学

文系第1問 ①

準備 放物線C: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 定義(※付)名前つて 円 D: $x^2 + y^2 = 1$ 点 P: $(\cos \theta, \sin \theta)$ 点 Q: $(-\cos \theta, \sin \theta)$ $0 < \theta < 90^\circ$ まずは、解法1~2で、なるべく計算量が少なくて
なるように工夫した解法を紹介しよ。STEP1: b の値を特定する

解法1-1. 点P, 点Qを通る条件

点Pを通るのて、 $\sin \theta = f(\cos \theta) \Leftrightarrow \sin \theta = a \cos^2 \theta + b \cos \theta + c$ 点Qを通るのて、 $\sin \theta = f(-\cos \theta) \Leftrightarrow \sin \theta = a \cos^2 \theta - b \cos \theta + c$ ①②を引いて、 $0 = 2b \cos \theta$ $0 < \theta < 90^\circ$ より $\cos \theta \neq 0$ かつ $b=0$

解法1-2 対称性の利用

右図のように、与えられたグラフには

4軸に関する対称性がある。

よて、放物線の軸はy軸であり

放物線Cは $y = f(x) = ax^2 + c$ の形
つまり、 $b=0$ (以下、これを併用)STEP2: a を特定し、 c を求める

解法2-1. 傾きの利用

点Pにおける接線 l の傾きを考える。 $f(x) = 2ax$ かつ l の傾きは、 $2a \cos \theta$ l の傾きは、 $2a \cos \theta$ また、OPの傾きが $\tan \theta$ かつ $l \perp OP$ より $-\frac{1}{\tan \theta}$ $2a \cos \theta = -\frac{1}{\tan \theta}$
 $a = -\frac{1}{2 \cos \theta \cdot \tan \theta}$
 $\therefore a = -\frac{1}{2 \sin \theta}$ $a = -\frac{1}{2s}$ ①に代入して、 $\sin \theta = -\frac{1}{2s} \cos^2 \theta + 0 + c$

$$\therefore c = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right)$$

解法2-2. 方向ベクトル

接線 l の傾きは $y' = 2ax$ に点Pの座標を代入して、 $2a \cos \theta$ よて、 l の方向ベクトルの1つを $\vec{d}$ とし、

$$\vec{d} = (1, 2a \cos \theta)$$

 $\vec{OP} = (\cos \theta, \sin \theta)$ であり $\vec{OP} \perp \vec{d}$ かつ $\vec{OP} \cdot \vec{d} = 0$ よて、 $\cos \theta \times 1 + \sin \theta \times 2a \cos \theta = 0$

$$a = -\frac{1}{2s} \quad \text{よては、2-1と同様に} \quad c = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right)$$

こまめに(1)の最短の解法(9分)

他の解法は、下に紹介。接線の方程式や接する条件などを使う
ので、計算が増えます。解法3-1. 放物線と円を連立 (x を消去) $(b=0)$ を求めたあとから、

$$\begin{cases} y = ax^2 + c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{を連立}$$

$$x^2 = 1 - y^2 \text{ を代入して、} y = a(1 - y^2) + c \quad \therefore ay^2 + y - a - c = 0$$

円と放物線が $(y = \sin \theta)$ で接するのて、

$$D = 1^2 - 4 \cdot a \cdot (-a - c) = 0$$

$$4a^2 + 4ac + 1 = 0 \quad \dots (4) \quad \leftarrow \text{接する条件}$$

③と④を連立。③より $c = ay^2 + y - a$ を代入し、

$$4a^2 + 4a(ay^2 + y - a) + 1 = 0$$

$$4a^2y^2 + 4ay + 1 = 0$$

$$(2ay + 1)^2 = 0 \quad y = -\frac{1}{2a} \text{ の重解}$$

よて $\sin \theta = s$ かつ l のて、

$$-\frac{1}{2a} = s \quad \therefore a = -\frac{1}{2s}$$

考察

この解法は
アリザレイルの計算量
だと思いまろ解法3-2. 放物線と円を連立 (y を消去) $(b=0)$ を求めたあとから、

$$\begin{cases} y = ax^2 + c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{を連立}$$

$$y = ax^2 + c \text{ を代入して、} x^2 + (ax^2 + c)^2 = 1$$

$$\therefore a^2x^4 + (2ac + 1)x^2 + c^2 - 1 = 0$$

 $x = \cos \theta$ と $x = -\cos \theta$ で接する a のて、

$$a^2(x - \cos \theta)^2(x + \cos \theta)^2 = a^2(x^2 - \cos^2 \theta)^2 \text{ とはならず。}$$

$$x^2 = X \text{ としたときの判別式} = 0 \quad (X - \cos^2 \theta)^2$$

Advice

円と放物線を連立する場合、
消去法(変換)をすると、
計算量が膨大になるのて、おススメ
しません。↓ 証拠 ↓

2024年

東大数学

文系第1問②

 $x^2 = X$ とおき

$$a^2 X^2 + (2ac + 1)X + c^2 - 1 = 0 \quad \dots (5)$$

$$\begin{aligned} (\text{判別式}) &= (2ac + 1)^2 - 4a^2(c^2 - 1) = 0 \\ 4a^2c^2 + 4ac + 1 - 4a^2c^2 + 4a^2 &= 0 \\ 4a^2 + 4ac + 1 &= 0 \quad \dots (6) \end{aligned}$$

⑤と⑥を連立すると、⑤の()²=0と変形できるはず。
闇雲に変形すると大変なの2針を決める

Cを消去する $\hookrightarrow$ 2も面倒

$$\textcircled{5} \times 2 \text{ より } 2a^2X^2 + (4ac + 2)X + 2(c^2 - 1) = 0$$

$$\textcircled{6} \Leftrightarrow 4ac = -4a^2 - 1 \text{ を代入して}$$

$$2a^2X^2 + (-4a^2 + 1)X + 2(c^2 - 1) = 0 \quad \downarrow \times 8a^2$$

$$16a^4X^2 + (-32a^4 + 8a^2)X + 16a^2c^2 - 16a^2 = 0$$

$$\textcircled{6} \text{ を2乗し、} (4ac)^2 = (-4a^2 - 1)^2$$

$$16a^2c^2 = (-4a^2 - 1)^2 \text{ を代入}$$

$$16a^4X^2 + (-32a^4 + 8a^2)X + (-4a^2 - 1)^2 - 16a^2 = 0$$

$$16a^4X^2 + (-32a^4 + 8a^2)X + (4a^2 - 1)^2 = 0 \quad \checkmark \text{ 計算ミス}$$

$$\{4a^2X - (4a^2 - 1)\}^2 = 0 \quad \leftarrow \text{両辺に2乗は、右!!}$$

$$\therefore X = \frac{4a^2 - 1}{4a^2}$$

aとcが消しつづいので、両方残し1を消す $\hookrightarrow$ 5の右から乗

$$a^2X^2 + (2ac + 1)X + c^2 - 1 = 0 \quad \dots (5)$$

$$\textcircled{6} \quad 1 = -4a^2 - 4ac \text{ を代入}$$

$$a^2X^2 + (2ac - 4a^2 - 4ac)X + c^2 - (-4a^2 - 4ac) = 0$$

$$a^2X^2 + (-4a^2 - 2ac)X + 4a^2 + 4ac + c^2 = 0$$

$$a^2X^2 + (-4a^2 - 2ac)X + (2a + c)^2 = 0$$

$$\{aX - (2a + c)\}^2 = 0 \quad \leftarrow \text{ここも、ちゃんと2乗は、右!!}$$

$$\therefore X = \frac{2a + c}{a} \quad \text{このまま、続き}$$

$$X = x^2 = \frac{2a + c}{a} \text{ で、接続は } x = \pm \cos \theta \text{ なの2}$$

$$(\pm \cos \theta)^2 = \frac{2a + c}{a} \quad \therefore c = a \cos^2 \theta - 2a \quad \dots (7)$$

$$\textcircled{6} \text{ に代入して、} 4a^2 + 4a(a \cos^2 \theta - 2a) + 1 = 0$$

$$4a^2 \cos^2 \theta - 4a^2 + 1 = 0$$

$$4a^2 \sin^2 \theta = 1 \quad a = \pm \frac{1}{2s}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a = \frac{1}{2s} \text{ のとき} \quad \textcircled{7} \text{ より } c &= \frac{1}{2s} \cos^2 \theta - 2 \cdot \frac{1}{2s} \\ &= \frac{1}{2s} (1 - s^2) - \frac{1}{s} \\ &= -\frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

$$\text{このとき、} f(x) = \frac{1}{2s} x^2 - \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) \text{ だが、これは}$$

$$\sin \theta = f(\cos \theta) \text{ を満たさない。 } \text{ 3-2 と 2針}$$

$$\text{(ii)} \quad a = -\frac{1}{2s} \text{ のとき、(i) と同様に、} c = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) \text{ となり}$$

$$\sin \theta = f(\cos \theta) \text{ を満たす}$$

考察

計算量が多すぎ
現実的ではない。

$$\text{よって、} a = -\frac{1}{2s} \quad c = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right)$$

解法3-3. 3-2の途中で分岐(小恒等式)

$$\textcircled{5} \quad a^2 x^4 + (2ac + 1)x^2 + c^2 - 1 = 0 \quad \text{は}$$

$$a^2 (x + \cos \theta)^2 (x - \cos \theta)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 (x^2 - \cos^2 \theta)^2 = 0 \quad \text{と因数分解できるはず}$$

つまり、

$$a^2 x^4 + (2ac + 1)x^2 + c^2 - 1 = a^2 (x^2 - \cos^2 \theta)^2$$

は恒等式である。

$$(\text{右辺}) = a^2 (x^4 - 2\cos^2 \theta \cdot x^2 + \cos^4 \theta)$$

$$= a^2 x^4 - 2a^2 \cos^2 \theta \cdot x^2 + a^2 \cos^4 \theta \quad \text{左の2. 係数と比較}$$

$$\begin{cases} 2ac + 1 = -2a^2 \cos^2 \theta & \Leftrightarrow 2ac = -2a^2 \cos^2 \theta - 1 \\ c^2 - 1 = a^2 \cos^4 \theta & \downarrow \times 4a^2 \end{cases}$$

$$4a^2c^2 - 4a^2 = 4a^4 \cos^4 \theta$$

$$(-2a^2 \cos^2 \theta - 1)^2 - 4a^2 = 4a^4 \cos^4 \theta$$

$$4a^4 \cos^4 \theta + 4a^2 \cos^2 \theta + 1 - 4a^2 = 4a^4 \cos^4 \theta$$

$$4a^2 (\cos^2 \theta - 1) + 1 = 0$$

$$4a^2 \sin^2 \theta = 1 \quad a = \pm \frac{1}{2s}$$

3-2と同じ結論。以下略

考察

3-2ほどでは無いが、

これも計算量が多くて、

答案には使えないレベル。

解法3では、両方とも関数で計算しました。

解法4以降では、片方ずつ接線にしてみま。

違いを比較してみよう。

準備

点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ における、放物線 C の接線 m は $y = 2a \cos\theta (x - \cos\theta) + \sin\theta$

円 D の接線 n は $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1$

解法4-1, 円の接線と放物線。

($b=0$ を求めたあとから.)

$$C: y = f(x) = ax^2 + c$$

$$n: (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1 \quad \text{と} \quad \text{点} P(\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{と接する。}$$

$$n: y = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{を} \quad C \quad \text{に代入}$$

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1}{\sin\theta} = ax^2 + c$$

$$a \sin\theta x^2 + \cos\theta \cdot x + c \sin\theta - 1 = 0 \quad \dots (8)$$

$$D = (\cos\theta)^2 - 4a \sin\theta (c \sin\theta - 1) = 0$$

$$\cos^2\theta - 4ac \sin^2\theta + 4a \sin\theta = 0$$

$$1 - \sin^2\theta - 4ac \sin^2\theta + 4a \sin\theta = 0$$

$$c = \frac{-\sin^2\theta + 4a \sin\theta + 1}{4a \sin^2\theta} \quad \dots (9)$$

⑧に代入して、

$$a \sin\theta x^2 + \cos\theta \cdot x + \frac{-\sin^2\theta + 4a \sin\theta + 1}{4a \sin^2\theta} \cdot \sin\theta - 1 = 0$$

$$a \sin\theta x^2 + \cos\theta \cdot x + \frac{-\sin^2\theta + 4a \sin\theta + 1}{4a \sin\theta} - 1 = 0$$

$$4a^2 \sin^3\theta x^2 + 4a \sin\theta \cos\theta x - \sin^3\theta + 4a \sin\theta + 1 - 4a \sin\theta = 0$$

$$4a^2 \sin^3\theta x^2 + 4a \sin\theta \cos\theta x + \cos^2\theta = 0$$

$$(2a \sin\theta x + \cos\theta)^2 = 0$$

$$\therefore (\text{重解}) = -\frac{\cos\theta}{2a \sin\theta}$$

(重解) = $\cos\theta$ となる。 (点 P と接する)

$$\cos\theta = -\frac{\cos\theta}{2a \sin\theta} \quad \therefore a = -\frac{1}{2s}$$

⑨に代入して

$$c = \frac{-s^2 + 4 \times (-\frac{1}{2s}) \times s + 1}{4 \times (-\frac{1}{2s}) \times s^2}$$

$$= \frac{-s^2 - 1}{-2s} = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right)$$

考察

やっぱり、これも計算量が大きい。

解法4-2, 放物線の接線と円

($b=0$ を求めたあとから.)

$$m: y = 2a \cos\theta (x - \cos\theta) + \sin\theta$$

$$D: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{と} \quad \text{点} P(\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{と接する。}$$

m を D に代入する。

$$x^2 + \{2a \cos\theta (x - \cos\theta) + \sin\theta\}^2 = 1$$

$$x^2 + 4a^2 \cos^2\theta (x - \cos\theta)^2 + 4a \sin\theta \cos\theta (x - \cos\theta) + \sin^2\theta = 1$$

$$(4a^2 \cos^2\theta + 1)x^2 + (-8a^2 \cos^3\theta + 4a \sin\theta \cos\theta)x + 4a^2 \cos^4\theta - 4a \sin\theta \cos^2\theta + \sin^2\theta - 1 = 0 \quad \dots (10)$$

$$D/4 = (-4a^2 \cos^3\theta + 2a \sin\theta \cos\theta)^2 - (4a^2 \cos^4\theta + 1)(4a^2 \cos^4\theta - 4a \sin\theta \cos^2\theta + \sin^2\theta - 1) = 0$$

$$(-4a^2 \cos^3\theta + 2a \sin\theta)^2 - (4a^2 \cos^4\theta + 1)(4a^2 \cos^4\theta - 4a \sin\theta - 1) = 0$$

$$16a^4 \cos^6\theta - 16a^3 \cos^3\theta \sin\theta + 4a^2 \sin^2\theta$$

$$- (16a^4 \cos^8\theta - 16a^3 \cos^5\theta \sin\theta - 4a^2 \cos^2\theta$$

$$+ 4a^2 \cos^2\theta - 4a \sin\theta - 1) = 0$$

$$4a^2 \sin^2\theta + 4a \sin\theta + 1 = 0$$

$$(2a \sin\theta + 1)^2 = 0$$

$$a = -\frac{1}{2s} \quad \text{以下略}$$

考察

4-1 よりも計算量が
多くなってる。

接線を使った計算量が少なくなるかな？
使えなかな。

最後に、接線同士が一致する
という方針で。

解法5 接線同士が一致

$$m: y = 2a \cos\theta (x - \cos\theta) + \sin\theta$$

$$n: (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1 \quad \text{の} \quad 2 \text{ が一致}$$

$$m \text{ を変形して} \quad 2a \cos\theta x - y - 2a \cos^2\theta + \sin\theta = 0$$

$$n \text{ の両辺} \times 2a \quad 2a \cos\theta x + 2a \sin\theta y - 2a = 0$$

$$\begin{cases} -1 = 2a \sin\theta \\ -2a \cos^2\theta + \sin\theta = -2a \end{cases} \quad \therefore a = -\frac{1}{2s}$$

この4行 (結果的に) 使えなかな。

考察

これは計算量も少なく、カンタンだよ。
ベストプラクティスとして使えな解法。

2024年

東大数学

文系第1問 (4)

(2) a, b, c の値を代入し.

$$\text{放物線 } C: y=f(x)=-\frac{1}{2s}x^2+\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$$

$$f(x)=0 \text{ とし.}$$

$$\frac{1}{2s}x^2=\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$$

$$x^2=s\left(s+\frac{1}{s}\right)$$

$$=s^2+1$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{s^2+1}$$

$$a=-\sqrt{s^2+1} \quad b=\sqrt{s^2+1} \quad \text{と置く}$$

よって、求める面積Aは

$$A=\int_a^b f(x) dx$$

$$=-\frac{1}{2s}\int_a^b (x-a)(x-b) dx$$

$$=-\frac{1}{6}\times\frac{1}{2s}(b-a)^3$$

$$=-\frac{1}{6}\times\frac{1}{2s}(2\sqrt{s^2+1})^3$$

$$=-\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

(3) 解法1: 2乗の大小比較

方針の考察

 $A \geq \sqrt{3}$ を示すが $A = \frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}$ と $\sqrt{3}$ の両片とも $\sqrt{\quad}$ があるよって、 $A \geq 0$ ($\sqrt{3} \geq 0$) を示す上で、 $A^2 - 3 \geq 0$ を示す

$$A = \frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}} > 0 \quad (\because 0 < \theta < 90^\circ \text{ で } s = \sin \theta > 0)$$

 $\sqrt{3} > 0$ より、

$$A \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow A^2 \geq 3 \quad \text{なので、} A^2 - 3 \geq 0 \text{ を示す}$$

$$A^2 - 3$$

$$= \frac{4}{9s^2}(s^2+1)^3 - 3$$

$$= \frac{4(s^2+1)^3 - 3 \times 9s^2}{9s^2}$$

$$= \frac{4s^6 + 12s^4 + 12s^2 + 4 - 27s^2}{9s^2}$$

$$= \frac{4t^3 + 12t^2 - 15t + 4}{9t}$$

見やすくする
ため $s^2 = t$
と置く $0 < t < 1$

この値が0以上にならばよい

$$g(t) = 4t^3 + 12t^2 - 15t + 4 \text{ とおく}$$

 $0 < t < 1$ において、 $g(t) \geq 0$ となることを示す.

$$g'(t) = 12t^2 + 24t - 15$$

$$= 3(4t^2 + 8t - 5)$$

$$= 3(2t-1)(2t+5)$$

t	0	$\frac{1}{2}$	1
g(t)	-	0	+
g(t)	↘	0	↗

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 15 \times \frac{1}{2} + 4$$

$$= \frac{1}{2} + 3 - \frac{15}{2} + 4 = 0$$

増減表から、確かに $g(t) \geq 0$ 以上より $A \geq \sqrt{3}$ が示された。

解法2 相加相乗を利用.

方針の考察

 $\frac{x^2+1}{x}$ なら、分母関数には相加相乗が使えよとある。

$$A = \frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{s^2+1}{s^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

とすると、分母関数になる。

$$A = \frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{s^2+1}{s^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{s^2+1}{s^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$
 $s = (s^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ とみて
 中身の中へ

$$s^{\frac{2}{3}} = t \text{ とする. } (0 < t < 1)$$

$$t^3 = (s^{\frac{2}{3}})^3 = s^2 \text{ となるので } A = \frac{2}{3}\left(\frac{t^2+1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$$

 $y = x^{\frac{3}{2}}$ は $x > 0$ で単調増加なので、 $\frac{t^2+1}{t}$ が最小の時にAも最小になる。

$$\frac{t^2+1}{t} = t + \frac{1}{t}$$

$$= t^2 + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t}$$

3文字の相加相乗を
使って、右辺を定数に
するために、次数を調整

(3文字の) 相加・相乗平均の関係から、

$$t^2 + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t} \geq 3 \times \sqrt[3]{t^2 \times \frac{1}{2t} \times \frac{1}{2t}}$$

$$t^2 + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t} \geq \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}$$

$$\left(\text{等号成り立つのは } t^2 = \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t}\right)$$

$$t = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \text{ の時}$$

 $0 < t < 1$ を満たす。今回はminを示す
必要はなく、大小
を示せばよいので
不要。この変形の本意は
 $\sqrt{\quad}$ の中のtが
消えちゃうから。

$$A = \frac{2}{3}\left(\frac{t^2+1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\geq \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}$$

よって証明された。

2024年

東大数学

文系第1問⑤

解法3: 因数分解する

$$\begin{aligned}
 A^2 - 3 &= \dots \\
 &= \frac{4s^6 + 12s^4 - 15s^2 + 4}{9s^2} \\
 &= \frac{4t^3 + 12t^2 - 15t + 4}{9t} \quad (s^2 = t \text{ とおく } t \geq 0) \\
 &= \frac{(t+4)(2t-1)^2}{9s^2} \geq 0
 \end{aligned}$$

よって $A^2 \geq 3$ となるので、 $A \geq \sqrt{3}$ が示される。

※ たまたま因数分解できたが、ふつうは

因数分解しようと思わないかも。でも、最短距離の解法

Memo

$$f(t) = 4t^3 + 12t^2 - 15t + 4$$

$$f(-4) = 0$$

$$\begin{array}{r}
 4t^2 - 4t + 1 \\
 t+4 \overline{) 4t^3 + 12t^2 - 15t + 4} \\
 \underline{4t^3 + 16t^2} \\
 -4t^2 - 15t \\
 \underline{-4t^2 - 16t} \\
 t + 4 \\
 \underline{t + 4} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(t) &= (t+4)(4t^2 - 4t + 1) \\
 &= (t+4)(2t-1)^2
 \end{aligned}$$

$$h\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = \left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - k\sqrt{\frac{k}{3}} + 1 \leq 0$$

$$\frac{k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}} - k\sqrt{\frac{k}{3}} + 1 \leq 0$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot k^{\frac{3}{2}} + 1 \leq 0 \quad \leftarrow 0 \text{ 以下になった!!}$$

$$k^{\frac{3}{2}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \therefore k \geq \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}}}$$

右より、両辺²乗する

以上より、 k の値域は $k \geq \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}}} \quad \leftarrow \text{解法2と同じ結論以下略}$

解法5: $\tan$ で置換 からの置換方針の考察

$s^2 + 1$ という式は、よく $\tan$ で置換する。 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ の公式で、変形が速い。
理系(数Ⅲ)でよく使う技術ですが、文系の問題でもたまに有効。

$$A = \frac{2}{3s} (s^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \text{ において、 } s = \tan \varphi \text{ とおく。}$$

φ の範囲は、 $0 < \theta < 90^\circ$ かつ $0 < s < 1$ なる φ は、 $0 < \varphi < 45^\circ$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ である)

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2}{3 \tan \varphi} (1 + \tan^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{2}{3 \tan \varphi} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3 \tan \varphi} \times \frac{1}{\cos^3 \varphi}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3 \sin \varphi \cos^3 \varphi} = \frac{2}{3 \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi)} \quad \leftarrow \text{見通しのよい関数になった。}$$

よって、 A の値域を知るには、 $\sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi)$ の値域がわかればよい。

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi &= p \text{ とおく。 } \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi) = p(1 - p^2) \text{ で} \\
 0 < \varphi < 45^\circ \text{ かつ } 0 < p < \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

このままでは計算
できないので、
さらに置換

$$I(p) = p(1 - p^2) \text{ とおく。 } I'(p) = -3p^2 + 1 \text{ より}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 t & (0) & \frac{1}{\sqrt{3}} & (\frac{1}{\sqrt{2}}) \\
 \hline
 h(t) & + & 0 & - \\
 \hline
 h(t) & (0) \nearrow & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \searrow (\frac{1}{2\sqrt{2}})
 \end{array}$$

$$I\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}$$

$$I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{3}$$

$$\therefore 0 < I(p) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{2}{3 I(p)} \quad \text{よって}$$

$$A \geq \frac{2}{3 \times \frac{2}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \quad \text{よって示された。}$$

解法4: 実数解を持つ条件(逆像法)方針の考察

分母関数の値域は、相加相乗が使える場合でも、

「 k 」とおき、等式にたいて、実数解を持つ条件(逆像法)を使うと
求められる。

(解法2の途中から)

$0 < t < 1$ における $\frac{t^3 + 1}{t}$ の範囲を知るために、実数解を持つ条件を使う。
(逆像法)

$$\frac{t^3 + 1}{t} = k \text{ とおく (} k \text{ は実数)}$$

$t^3 - kt + 1 = 0$ とおく。 t が実数解を持つ条件を調べる。

($0 < t < 1$ かつ $t^3 - kt + 1 = 0$ となる実数 t が存在する) $\Leftrightarrow k$ の値域
制約条件 目的関数 逆像

$$h(t) = t^3 - kt + 1 \text{ とおく。 } h'(t) = 3t^2 - k$$

(i) $k \leq 0$ のとき $h'(t) > 0$ なるので、 $h(t)$ は単調増加

t	(0)	(1)
$h(t)$		+
$h(t)$	(1)	$\nearrow$

このとき、 $h(t) = 0$ は実数解を持つ。

(ii) $k > 0$ のとき $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \sqrt{\frac{k}{3}}$

増減表より、

$h(t) = 0$ が実数解を持つ

条件は、 $h\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right) \leq 0$

t	(0)	$\sqrt{\frac{k}{3}}$	(1)
$h'(t)$	-	0	+
$h(t)$	(1)	$\searrow$ ○ $\nearrow$	(2-k)

ここが0以下
ならOK